Master de Physique et d'Astrophysique
Ecole Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard
Module d'astrophysique des particules
Durée 2 heures
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Enoncé de l'examen du mercredi 19 janvier 2005

Détection directe de neutralinos et diagramme d'exclusion

Les observations astronomiques indiquent la présence de matière noire au sein des galaxies ainsi qu'à l'intérieur de leurs amas. Aux échelles cosmologiques, l'existence de cette composante est confirmée avec de plus l'indication qu'elle ne peut être constituée d'atomes ordinaires. Une explication possible de cette masse cachée astronomique réside dans l'existence de particules massives et neutres aux faibles interactions dénommées de manière générique **neutralinos**. Si cette hypothèse s'avérait exacte, nous serions alors plongés dans un nuage formé de ces particules et constituant le halo de la Voie Lactée.

Dans la première partie de ce problème, vous aborderez le modèle de la sphère isotherme qui décrit la distribution des neutralinos dans notre galaxie. La seconde partie du sujet est un rappel de cours sur la détection directe dans lequel vous retrouverez le spectre des événements en fonction de l'énergie de recul nucléaire. La troisième partie concerne les limites que l'expérience permet de dériver sur la section efficace de collision neutralino–noyau ainsi que le diagramme d'exclusion correspondant dans le plan (m_χ, σ_0).

1 Modèle de la sphère isotherme.

Cette partie est notée sur 6 points.

Dans le modèle de **la sphère isotherme**, la distribution des neutralinos dans l'espace des phases suit la loi maxwellienne

$$\mathrm{f}\,(\vec{r}, \vec{v}) \; = \; C \,\exp\left\{ - \frac{E}{\nu^2} \right\} \quad , \tag{1}$$

où $E = v^2/2 + \Phi(\vec{r})$ désigne l'énergie mécanique totale par unité de masse. Dans le référentiel galactique, les vitesses sont distribuées de manière isotrope et la dispersion de vitesse unidimensionnelle est dénotée ν. Nous sommes en présence d'un gaz où l'équipartition des vitesses – et non des énergies – est réalisée.

1.1) (1 point) Montrer qu'en tout point $\vec{r}$, la distribution des neutralinos en fonction de leur vitesse $\vec{v}$ est donnée par

$$d^3 n(\vec{r}, \vec{v}) \; = \; n(\vec{r}) \; \left\{ 2\,\pi\,\nu^2 \right\}^{-3/2} \; \exp\left\{ - \frac{v^2}{2\nu^2} \right\} \; d^3\vec{v} \quad . \tag{2}$$

1.2) (0,5 point) Calculer la densité $n(\vec{r})$ en fonction de la constante C, de la dispersion de vitesse ν et du potentiel de gravitation $\Phi(\vec{r})$.

1.3) (2,5 points) En supposant que ce halo isotherme est autogravitant – il détermine donc seul sa propre gravité sans composante supplémentaire – et sphérique, montrer que la solution invariante d'échelle à l'équation de Poisson est de la forme

$$\rho(r) \; = \; \frac{A}{r^2} \quad . \tag{3}$$

Exprimer la constante A en fonction de la dispersion de vitesse ν et de la constante de gravitation G.

1.4) (1 point) Montrer que ce modèle permet d'expliquer la platitude des courbes de rotation des galaxies spirales et relier la dispersion de vitesse ν à la vitesse de rotation V_C.

1.5) (1 point) La courbe de rotation de la Voie Lactée semble plate avec une vitesse de rotation égale à $V_C = 220$ km s^{-1}. Calculer la dispersion de vitesse ν ainsi que la densité $\rho_\chi(\odot)$ des neutralinos dans le voisinage du système solaire. On supposera que la distance galactocentrique de la Terre est $r_\odot = 8$ kiloparsecs et l'on montrera que

$$\rho_\chi(\odot) \simeq 0.5 \text{ GeV cm}^{-3} \quad . \tag{4}$$

2 Evénements et spectre de recul.

Dans cette partie – **notée sur 8 points** – nous nous intéressons aux collisions des neutralinos galactiques sur les noyaux d'un instrument terrestre susceptible de mesurer les reculs nucléaires ainsi engendrés et donc de déceler – de manière directe – ces particules.

2.1) (1 point) Dans le référentiel du laboratoire, un neutralino de masse m_χ et de vitesse v_χ entre en collision avec un noyau de masse $m_{\rm N}$ initialement au repos. Calculer l'énergie Q transférée au noyau au cours de l'impact en fonction de v_χ, de $m_{\rm N}$, de la masse réduite μ du système noyau–neutralino et de l'angle $\theta^\star$ sous lequel le neutralino est diffusé dans le référentiel du centre de masse de la réaction. On rappelle que

$$\frac{1}{\mu} \; = \; \frac{1}{m_\chi} + \frac{1}{m_{\rm N}} \quad . \tag{5}$$

2.2) (1 point) La diffusion est isotrope dans le référentiel du centre de masse. En déduire que la section efficace différentielle en fonction de l'énergie de recul est une constante donnée par

$$\frac{d\sigma}{dQ} \; = \; \frac{\sigma}{Q_{\rm max}} \quad , \tag{6}$$

où σ dénote la section efficace totale de collision. Exprimer l'énergie maximale de recul $Q_{\rm max}$ en fonction de μ, de v_χ et de $m_{\rm N}$.

2.3) (1 point) Nous supposerons à partir de maintenant que l'interaction neutralino–noyau est régie par le couplage scalaire

$$\mathcal{L} \; = \; g_S \times A \times \{\bar{\chi}\chi\} \times \left\{\bar{\Psi}_N \Psi_N\right\} \quad , \tag{7}$$

où A dénote le nombre de nucléons constituant le noyau N *. Nous avons démontré en cours que la section efficace correspondante s'écrivait

$$d\sigma \, |\vec{v}_\chi - \vec{v}_{\rm N}| \; = \; \frac{2}{\pi} \, g_S^2 \, A^2 \, \frac{m_{\rm N}}{v_\chi} \, dQ \quad . \tag{8}$$

Les expériences de détection directe mettent en jeu des cibles de nature différente – CDMS et EDELWEISS utilisent du germanium et du silicium alors que DAMA emploie de l'iodure de sodium. Afin de comparer les différents résultats entre eux, il est commode de se ramener à la section efficace σ_0 relative à l'interaction entre un neutralino – **supposé très lourd** – et un nucléon. Montrer que la section efficace σ correspondant au noyau N est reliée à la valeur fiducielle σ_0 par

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} \; = \; A^4 \left\{ 1 + \frac{m_{\rm N}}{m_\chi} \right\}^{-2} \quad . \tag{9}$$

*Nous supposons en effet que le neutralino se couple de manière identique aux protons et aux neutrons.

2.4) (3 points) La distribution des événements – par noyau cible – s'obtient en convoluant la section efficace de diffusion $d\sigma$ avec la distribution de vitesse (2) des neutralinos. Celle–ci sera prise isotrope par rapport à la Terre afin de simplifier l'analyse. La densité numérique des particules dans le voisinage solaire est reliée à la valeur de $\rho_\chi(\odot)$ dérivée dans la partie précédente ainsi qu'à la masse m_χ. Montrer que le taux différentiel de collision par noyau décroît exponentiellement avec l'énergie transférée Q

$$\frac{d\Gamma}{dQ} \; = \; \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left\{ \frac{\sigma \, \nu}{Q_0} \right\} \left\{ \frac{\rho_\chi(\odot)}{m_\chi} \right\} e^{-Q/Q_0} \quad , \tag{10}$$

où Q_0 est donnée par

$$Q_0 \; = \; 4 \, \frac{\mu^2}{m_{\rm N}} \, \nu^2 \quad . \tag{11}$$

2.5) (2 points) Montrer que la relation précédente se traduit par la distribution en énergie de recul

$$\frac{d\Gamma}{dQ} \; = \; \mathcal{G} \times \left\{ \frac{\sigma_0}{10^{-6}\,\text{pb}} \right\} \left\{ \frac{A}{100} \right\}^2 \left\{ \frac{100\,\text{GeV}}{m_\chi} \right\} e^{-Q/Q_0} \quad , \tag{12}$$

où l'on exprimera le taux d'événements $\mathcal{G}$ en nombre de collisions kev^{-1} kg^{-1} jour^{-1}.

3 Diagramme d'exclusion dans le plan (m_χ, σ_0).

Cette partie est notée sur 6 points.

Une expérience typique de recherche directe de neutralinos expose pendant le laps de temps $\mathcal{T}$ une masse $\mathcal{M}$ constituée de noyaux de numéro atomique A. Les reculs nucléaires ne sont décelés que si leur énergie Q excède un seuil Q_S de l'ordre de quelques keV. Un fond résiduel de neutrons est responsable des événements détectés au nombre de $\mathcal{N}_{\rm exp}$. Afin de traduire l'observation de ces collisions en une contrainte expérimentale – ou plutôt en un seuil de sensibilité – sur la section efficace de collision σ_0, il convient de calculer le nombre d'interactions attendues $\mathcal{N}_\chi$ entre neutralinos et noyaux et d'imposer que

$$\mathcal{N}_\chi \left\{ \sigma_0, m_\chi, A \right\} \leq \mathcal{N}_{\rm exp} \quad . \tag{13}$$

Cette condition conduit à une limite supérieure sur la section efficace σ_0 en fonction de la masse m_χ du neutralino et se représente par une région **exclue** du plan (m_χ, σ_0) située au–dessus d'une courbe que vous déterminerez dans cette partie.

3.1) (2 points) Montrer que le nombre de collisions entre les neutralinos galactiques et le détecteur de masse $\mathcal{M}$ associés à une énergie de recul supérieure au seuil Q_S est donné par

$$\mathcal{N}_\chi \;=\; \sqrt{\frac{8}{\pi}} \times \{\sigma_0\, \nu\, \mathcal{T}\} \times \left\{ \frac{\mathcal{M}}{m_{\rm p}} \right\} \times \left\{ \frac{\rho_\chi(\odot)}{m_{\rm p}} \right\} \times \left\{ \frac{A^2}{\mathcal{F}(x)} \right\} \quad , \tag{14}$$

où $m_{\rm p}$ désigne la masse du proton et où $\mathcal{F}(x)$ est la fonction

$$\mathcal{F}(x) \;=\; \left\{ \frac{x}{\sqrt{x}-1} \right\} e^{\alpha x} \quad . \tag{15}$$

Exprimer la variable sans dimension x en fonction de la masse du neutralino m_χ et de la masse du noyau cible $m_{\rm N} = A\, m_{\rm p}$. Déterminer également α en fonction de $m_{\rm N}$, de la dispersion de vitesse ν et du seuil Q_S. Que vaut α dans le cas où $A = 100$ et $Q_S = 5$ keV ?

3.2) (2 points) Etudier l'évolution de la fonction $\mathcal{F}$ lorsque x varie de 1 à l'infini. En déduire l'allure de la courbe d'exclusion $\sigma_0^{\rm sup}$ en fonction de m_χ. On montrera en particulier que $\sigma_0^{\rm sup}$ est proportionnel à m_χ dans le régime des fortes masses de neutralino.

3.3) (1 point) La courbe donnant $\sigma_0^{\rm sup}$ en fonction de m_χ passe par un minimum. Montrer que dans la limite où le paramètre α est petit devant 1, ce minimum correspond à une masse de neutralino m_χ égale à la masse $m_{\rm N}$ du noyau cible.

3.4) (1 point) Une expérience comme EDELWEISS a une exposition $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$ d'une dizaine de kilogramme $\times$ jour. La cible est du germanium avec $A = 73$. En supposant que $\mathcal{N}_{\rm exp} = 10$, calculer la valeur minimale de σ_0 exclue par cette expérience.

Bon courage !

Glossaire

Constante de gravitation de Newton

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad . \tag{16}$$

Conversion du kiloparsec en mètre

$$1 \text{ kiloparsec} = 3.086 \times 10^{19} \text{ m} \quad . \tag{17}$$

Nombre d'Avogadro

$$\mathcal{N}_{\mathrm{a}} = 6.023 \times 10^{23} \quad . \tag{18}$$

Nous supposons ici que protons et neutrons ont la même masse m_{p} en sorte que la masse du noyau de numéro atomique A vaut $m_{\mathrm{N}} = A \times m_{\mathrm{p}}$. Une mole de cet élément a une masse de A grammes. On prendra

$$m_{\mathrm{p}} = 0.934 \text{ GeV} \quad . \tag{19}$$

Vitesse de la lumière

$$c = 3 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1} \quad . \tag{20}$$

Unité d'énergie de physique des particules

$$1 \text{ keV} = 1.6 \times 10^{-16} \text{ J} \quad . \tag{21}$$