Master de Physique et d'Astrophysique
Ecole Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard
Module d'astrophysique des particules
Durée 2 heures – Session de rattrapage
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Enoncé de l'examen du lundi 6 mars 2006

Découplage des nucléons et asymétrie baryonique

Nous avons supposé en cours qu'il y avait autant de matière que d'antimatière lorsque nous avons analysé le découplage d'un neutralino lourd. Nous allons maintenant examiner si cette hypothèse s'applique aux baryons et nous montrerons par l'absurde que ceux–ci doivent présenter une asymétrie. Protons et neutrons doivent être en effet un peu plus abondants que leurs antiparticules. Nous simplifierons l'analyse en laissant de côté la transition de phase entre quarks et hadrons. Le gaz baryonique est donc constitué d'un mélange contenant autant de protons que de neutrons. Chacune de ces espèces possède deux états de spin. La masse commune des nucléons vaut $M = 0.938$ GeV. Le but de ce sujet est de calculer la densité relique des baryons en partant de l'hypothèse que particules et antiparticules sont en nombre égal. Vous obtiendrez un résultat de sept ordres de grandeur inférieur à la valeur observée. Roland Omnès a proposé un modèle d'univers symétrique dans lequel baryons et antibaryons se séparent très tôt afin de ne pas complètement s'annihiler mutuellement. Vous calculerez la température et l'âge de l'univers au moment de cette séparation – dont le mécanisme n'est d'ailleurs pas connu – et calculerez la masse maximale des grumeaux de matière ou d'antimatière ainsi formés.

1.1) (1 point) La constante de Hubble est prise égale à $H_0 = 70$ km s^{-1} Mpc^{-1}. Les observations de WMAP et les résultats de la nucléosynthèse primordiale indiquent que l'abondance baryonique actuelle vaut $\Omega_{\rm B} = 0.04$. Calculer la masse volumique actuelle $\rho^0_{\rm B}$ des baryons et leur densité numérique $n^0_{\rm B}$. La température du fond de rayonnement micro–onde est de $2,73$ K aujourd'hui. En déduire le rapport baryon–sur–photon

$$\eta^0_{\rm obs} = \frac{n^0_{\rm B}}{n^0_\gamma} \; . \tag{1}$$

1.2) (1 point) Montrez que lorsque l'univers a une température de l'ordre de quelques MeV, ce rapport vaut $\eta_{\mathrm{obs}} \simeq 1,5 \times 10^{-9}$.

1.3) (1 point) Dans l'univers primordial, la population des baryons * est en interaction avec le plasma environnant. En particulier, la réaction

$$\mathrm{B} + \bar{\mathrm{B}} \;\rightleftharpoons\; \pi^0\pi^0 \;,\; \pi^+\pi^- \;,\; f\bar{f} \qquad (2)$$

est en équilibre lorsque la température est supérieure à la masse M des nucléons. Montrer que l'équation régissant l'évolution de leur densité n_{B} se met sous la forme

$$\frac{dn_{\mathrm{B}}}{dt} \;=\; -3Hn_{\mathrm{B}} - \;<\sigma_{\mathrm{an}} v>\, {n_{\mathrm{B}}}^2 + \;<\sigma_{\mathrm{an}} v>\, n_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eq}\,2} \;\;. \qquad (3)$$

1.4) (1 point) Démontrer que lorsque le gaz baryonique est non–relativiste, la densité numérique totale des nucléons est donnée par la relation

$$n_{\mathrm{B}}^{\mathrm{eq}} \;=\; g_{\mathrm{B}}\, T^3\, e^{-a} \left(\frac{a}{2\,\pi}\right)^{3/2} \;\;. \qquad (4)$$

Quelle est la signification des paramètres a et g_{B} ?

1.5) (2 points) On note T_F la température à laquelle la réaction (2) cesse d'être en équilibre. Le paramètre a_F dénote le rapport M/T_F. Démontrer que a_F vérifie l'équation :

$$\sqrt{a_F}\, e^{a_F} \;=\; C \;=\; \frac{g_{\mathrm{B}}}{2}\, \frac{3\sqrt{5}}{(2\pi)^3} \left\{\frac{<\sigma_{\mathrm{an}} v>\; M_{\mathrm{P}}\, M}{\sqrt{g_{\mathrm{eff}}}}\right\} \;\;. \qquad (5)$$

Le paramètre g_{eff} désigne le nombre effectif de degrés de liberté du plasma primordial au moment où le découplage a lieu. Il est exprimé dans la même unité avec laquelle la contribution des photons vaut 1.

1.6) (1 point) Donner la valeur du facteur g_{B}. La section efficace d'annihilation σ_{an} à prendre en compte est égale à la surface d'une cible nucléonique en forme de disque dont le rayon est égal à 1 Fermi. Calculer la constante C en supposant que T_F est comprise entre 10 et 30 MeV.

1.7) (2 points) On veut résoudre l'équation (5) à l'aide d'une calculatrice de poche. Supposons que a_n soit une solution approchée. Le terme par lequel la série débute est par exemple $a_0 = 1$. On définit la suite par l'itération :

$$a_{n+1} \;=\; Log\left(\frac{C}{\sqrt{a_n}}\right) \;\;. \qquad (6)$$

*On devrait dire nucléons car les particules baryoniques que nous considérons ici sont simplement les protons et les neutrons.

On montrera que la suite des a_n converge vers la solution recherchée a_F. On pourra par exemple tracer les fonctions e^a et $C/\sqrt{a}$ afin d'élaborer une démonstration graphique.

1.8) (1 point) Calculer la suite des a_n en prenant à partir de maintenant $C = 2 \times 10^{19}$. A partir de quel ordre n le résultat avec 6 chiffres significatifs après la virgule est–il stable ?

1.9) (1 point) Calculer la température de découplage T_F en MeV.

1.10) (1 point) Afin de simplifier notre étude, nous négligerons l'annihilation résiduelle qui reste active un peu après le découplage en sorte que la co–densité asymptotique des baryons est égale à la valeur de découplage avec $f_{\rm B}^{\rm asy} \equiv f_{\rm B}^{\rm eq}(T_F)$. En déduire que le rapport baryon–sur–photon est donné par

$$\eta \; = \; \left. \frac{n_{\rm B}}{n_\gamma} \right|_{\rm F} \; = \; \frac{1}{\zeta(3)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, {a_F}^{3/2} \, e^{-\,a_F} \quad , \tag{7}$$

lorsque la température de l'univers est de l'ordre de quelques MeV.

1.11) (1 point) Calculer η avec la valeur de a_F trouvée à la question **1.8** et en prenant $\zeta(3) = 1.20205$. Le résultat est–il compatible avec celui que vous avez dérivé à la question **1.2** ? Conclusion ?

1.12) (1 point) Roland Omnès propose qu'un mécanisme inconnu sépare les baryons des antibaryons. Cette séparation doit donc intervenir avant que la réaction (2) cesse d'être en équilibre – à une température $T_{\rm sep}$ nécessairement supérieure à la température de découplage T_F. Montrer que le paramètre $a_{\rm sep}$ correspondant vérifie l'équation

$$\eta_{\rm obs} \; = \; 1,5 \times 10^{-9} \; = \; \frac{1}{\zeta(3)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, {a_{\rm sep}}^{3/2} \, e^{-\,a_{\rm sep}} \quad . \tag{8}$$

1.13) (3 points) En vous inspirant de la question **1.7**, résoudre l'équation précédente et donner la valeur de $a_{\rm sep}$ et de $T_{\rm sep}$.

1.14) (1 point) Calculer l'âge de l'univers au moment de la séparation.

1.15) (2 points) Le mécanisme de séparation entre baryons et antibaryons est certes inconnu mais il doit obéir à l'impératif de causalité. A l'issu de cette séparation, l'univers est constitué d'une mozaïque de domaines contenant chacun exclusivement de la matière ou de l'antimatière. Quelle est la taille maximale $\lambda_{\rm sep}$ d'un de ces domaines ? Calculer alors le volume correspondant en supposant qu'il s'agit d'une sphère de diamètre $\lambda_{\rm sep}$. Déterminer alors la masse baryonique contenue dans ce domaine. Conclusion ?

Bon courage !

Glossaire

Constante réduite de Planck

$$\hbar \;=\; 1.054 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s} \quad . \tag{9}$$

Vitesse de la lumière

$$c \;=\; 3 \times 10^{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}} \quad . \tag{10}$$

Constante de Boltzmann

$$k \;=\; 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}} \quad . \tag{11}$$

Masse de Planck

$$M_{\mathrm{P}} \;=\; 1.22 \times 10^{19}\ \mathrm{GeV} \quad . \tag{12}$$

Densité de fermeture de l'univers

$$\rho_C^0 \;=\; 1.88 \times 10^{-29}\ h^2\ \mathrm{g\ cm^{-3}} \;=\; 10.6\ \mathrm{keV\ cm^{-3}}\ h^2 \quad . \tag{13}$$

Unité d'énergie de physique des particules

$$1\ \mathrm{GeV} \;=\; 1.6 \times 10^{-10}\ \mathrm{J} \quad . \tag{14}$$

Définition de l'unité de distance en physique nucléaire

$$1\ \mathrm{Fermi} \;=\; 10^{-13}\ \mathrm{cm} \quad . \tag{15}$$