

Master de Physique et d'Astrophysique
Ecole Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard
Module d'astrophysique des particules
Durée 3 heures
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Enoncé de l'examen du vendredi 26 janvier 2007

Optique gravitationnelle

Nous revenons dans ce problème sur les mirages gravitationnels engendrés par un amas galactique dont la distribution de matière est modélisée par une sphère isotherme. Dans la première partie, nous rajouterons cependant un coeur de densité homogène et analyserons son effet sur les images que l'amas est susceptible de donner d'un objet lointain. Nous montrerons que les images multiples ne sont possibles que si le coeur est suffisamment petit. Nous nous intéresserons ensuite dans la seconde partie au régime dit du weak lensing (lentillage faible) pour lequel les sources ne sont que légèrement déformées. Nous définirons la matrice de déformation et montrerons que deux effets se combinent : la convergence et le cisaillement. Nous redérivons finalement de manière assez formelle l'équation des lentilles ainsi que l'expression du vecteur $\alpha(\vec{a})$ en introduisant le potentiel projeté $\psi(\vec{a})$ largement utilisé dans la littérature. Cette dernière partie est difficile et constitue en fait un complément de cours à étudier tranquillement. Les trois parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1 Sphère isotherme avec coeur homogène.

Cette partie est notée sur 12 points.

Dans le modèle de la sphère isotherme, la densité diverge au centre. Dans le cas d'un véritable amas (en fait de la galaxie elliptique géante placée en son centre) la distribution de matière devient homogène en deçà d'un rayon de coeur r_c de l'ordre d'une dizaine de kiloparsecs. La densité responsable de l'effet de lentille gravitationnelle se met alors sous la forme

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2}, \quad (1)$$

où σ est la dispersion de vitesse unidimensionnelle et G la constante de gravitation de Newton.

1.1) (2 points) Montrer que la masse surfacique associée est donnée par

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \frac{\sigma^2}{2G\sqrt{r_c^2 + \xi^2}} . \quad (2)$$

Le centre de l'amas est situé au point O alors que l'observateur est en T . La ligne de visée est la droite OT est constitue l'axe Oz du problème. Le plan de la lentille (Oxy) centré en O est perpendiculaire à l'axe de visée Oz . La distance entre O et T est notée $z_T = D_L > 0$. Un objet lointain E émet de la lumière ou des ondes radio que T détecte. La projection de E sur l'axe vertical Oz est le point S situé en $z_S = z_E = -D_{LS} < 0$. En l'absence de tout effet gravitationnel, le rayon issu de E et atteignant l'observateur T irait en droite ligne en traversant le plan de la lentille en I . Ce point correspond donc à la position de la source sur le fond du ciel une fois cette dernière ramenée au plan $z = 0$ du déflecteur. En présence de l'effet gravitationnel étudié dans ce problème, le rayon issu de E et qui atteint effectivement l'observateur T traverse le plan de la lentille en A . Il subit une déflexion car le vecteur unitaire \vec{e}_{in} porté par le segment de droite EA n'est pas identique au vecteur unitaire \vec{e}_{out} porté par le segment de droite AT . On notera

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \vec{\eta} && \text{position de l'objet source} \\ \vec{OA} &= \vec{a} && \text{position de son (ses) image(s)} . \end{aligned} \quad (3)$$

On a démontré en cours que les positions de la source $\vec{\eta}$ et de son image \vec{a} sont liées par l'équation des lentilles

$$\vec{\eta} = \vec{a} - \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \vec{\alpha}(\vec{a}) , \quad (4)$$

où $D_S = D_L + D_{LS}$ et où le vecteur $\vec{\alpha}$ est donné par

$$\vec{\alpha}(\vec{a}) = \frac{4G}{c^2} \int_{(Oxy)} d^2\xi \Sigma(\vec{\xi}) \frac{(\vec{a} - \vec{\xi})}{\|\vec{a} - \vec{\xi}\|^2} . \quad (5)$$

1.2) (2 points) Calculer le vecteur $\vec{\alpha}$ en fonction de σ , de la vitesse de la lumière c , du rayon de coeur r_c et du vecteur \vec{a} .

1.3) (2 points) Montrer que O , I et A sont alignés. Etablir que les positions η et a (en valeur algébrique) de I et de A sur l'axe radial OI vérifient la relation

$$\frac{r_c}{R_0} x - \frac{\eta}{R_0} = F(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} , \quad (6)$$

où $x = a/r_c$. On donnera l'expression de R_0 en fonction de σ , de c et des distances D_L , D_{LS} et D_S .

1.4) (2 points) Il conviendra d'étudier le comportement asymptotique de la fonction $F(x)$ lorsque x tend vers 0 puis vers l'infini. On montrera ensuite que la dérivée $F'(x)$ décroît de $1/2$ à 0 lorsque x augmente de 0 à $+\infty$. On posera avec profit $x = \sinh 2t$ et on exprimera $F(x)$ puis $F'(x)$ en fonction de t .

1.5) (2 points) Quelle relation R_0 et r_c vérifient-ils pour que l'amas puisse donner de I des images multiples ? Discuter alors leur existence en fonction de η . Montrer que lorsque le rayon de coeur r_c tend vers 0, on retrouve les résultats du cours concernant la sphère isotherme singulière.

1.6) (1 point) On considère un amas dont la dispersion de vitesse σ vaut 10^3 km/s et dont le coeur a un rayon $r_c = 10$ kpc. Montrer qu'il existe une distance minimale D_L^0 en dessous de laquelle l'amas ne donne qu'une seule image A d'une source lointaine E , quelles que soient la distance D_S de celle-ci et sa position η sur le plan de la lentille. Calculer D_L^0 en mégaparsecs (Mpc).

1.7) (1 point) L'amas lentille est placé maintenant à la distance $D_L = 500$ Mpc et déforme l'image I d'une source lointaine E située en $D_S = 2D_L = 1$ Gpc. Les points T , O et $E \equiv S$ sont parfaitement alignés de sorte que l'on observe un anneau d'Einstein dont le rayon $R_E = R_0/2$. Calculer le rayon de coeur r_c dans le cas où σ vaut 10^3 km/s. On exprimera le résultat en kiloparsecs.

2 Weak lensing : convergence et cisaillement.

Cette partie est notée sur 8 points.

Lorsque la source E est loin de l'axe optique TO et que le module du vecteur position $\vec{\eta}$ est grand devant le rayon gravitationnel R_0 , la lentille n'en donne qu'une seule image A peu déformée. Ce régime du weak lensing constitue l'objet de cette partie. Le rayon de coeur r_c peut alors être considéré comme nul et l'équation des lentilles prend la forme simplifiée

$$\vec{\eta} = \vec{a} \left\{ 1 - \frac{R_0}{\|\vec{a}\|} \right\} . \quad (7)$$

Nous nous intéressons ici à la manière dont une petite région entourant le vecteur $\vec{\eta}$ est déformée par la lentille. Il s'agit donc d'étudier la correspondance entre le vecteur $\delta\vec{\eta}$, qui explore un petit champ autour de $\vec{\eta}$, et le vecteur $\delta\vec{a}$ qui décrit le champ image

correspondant. On définit la matrice de déformation \mathcal{D} par

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial a_j} , \quad (8)$$

qui permet de passer du champ image entourant A au champ objet entourant la source I .

2.1) (2 points) Dans le plan (Oxy) de la lentille, l'angle entre le vecteur \vec{a} et l'axe Ox vaut θ . Montrer alors que la matrice de déformation se met sous la forme

$$\mathcal{D}_{ij} = (1 - \kappa) \mathbb{I}_2 + \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} . \quad (9)$$

On exprimera la convergence κ et le cisaillement γ en fonction de R_0 et du module du vecteur \vec{a} .

2.2) (1 point) La convergence

On considère l'expression (9) dans laquelle on impose $\gamma = 0$. En l'absence d'effet gravitationnel, la source apparaît sous la forme d'une tache circulaire infinitésimale (de rayon pris égal à 1 par convention) entourant le point I . Montrer que la lentille en donne une image circulaire agrandie dont le rayon sera calculé en fonction de κ . Pourquoi avoir choisi le nom de convergence pour cet effet ?

2.3) (1 point) Le cisaillement

Cette fois on force κ à être nulle dans l'expression (9). On prendra $\theta = 0$ de sorte que Ox et l'axe radial OIA coïncident. Que devient la tache source précédente lorsque $\gamma > 0$? Montrer que le disque objet est aplati radialement mais allongé dans la direction orthoradiale Oy . C'est l'effet de cisaillement *.

2.4) (1,5 points) La matrice (9) décrit l'action combinée de la convergence et du cisaillement. Reprendre la question précédente et montrer que le disque source circulaire est encore transformé en une ellipse dont on calculera le grand axe μ et le petit axe ν en fonction de κ et de γ . L'excentricité e de l'ellipse est définie par

$$e^2 = 1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} . \quad (10)$$

Calculer e en fonction de κ et de γ puis simplifier l'expression obtenue lorsque κ et γ sont très petits devant 1.

2.5) (1 point) La lumière provenant de la source E est amplifiée par effet gravitationnel d'un facteur \mathcal{A} que l'on exprimera en fonction du déterminant de la matrice de déformation \mathcal{D} .

*Ce terme est employé également pour décrire la déformation d'un solide sous l'effet d'une compression exercée dans une direction donnée.

2.6) (1 point) Appliquer le résultat de la question précédente à la matrice (9) et exprimer l'amplification lumineuse \mathcal{A} correspondante en fonction de κ et de γ .

2.7) (0,5 point) Calculer finalement l'amplification lumineuse engendrée par une distribution isotherme singulière en fonction de R_0 et de a . En utilisant le résultat obtenu dans le régime du strong lensing (il est permis de le faire ici), donner la valeur de a pour laquelle \mathcal{A} devient infinie. Qu'observe-t-on alors ?

3 Une approche plus formelle.

Cette partie est notée sur 10 points.

Elle est réservée aux amateurs. Donc prudence avant de perdre du temps ici !

Nous avons montré en cours que l'équation d'une trajectoire lumineuse se met sous la forme

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = -2\vec{\nabla}_\perp\Phi . \quad (11)$$

Dans la configuration que nous avons adoptée et qui est rappelée à la fin de la question (1.1), le gradient perpendiculaire a pour composante les dérivées partielles ∂_x et ∂_y en sorte que pour le potentiel gravitationnel Φ , il vient

$$\vec{\nabla}_\perp\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_y . \quad (12)$$

3.1) (2 points) En reprenant la démonstration de l'équation des lentilles, établir que

$$\vec{\eta} = \vec{a} - \vec{\nabla}_\perp\psi , \quad (13)$$

où le potentiel projeté ψ est donné par

$$\psi(x, y) = \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\Phi}{c^2} dz . \quad (14)$$

3.2) (2 points) On définit désormais le vecteur $\vec{\alpha}$ par la relation

$$\vec{\alpha}(x, y) = \frac{D_S}{D_L D_{LS}} \vec{\nabla}_\perp\psi . \quad (15)$$

Montrer que

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\alpha} = \frac{8\pi G}{c^2} \Sigma , \quad (16)$$

où Σ désigne la masse surfacique et ne dépend que de x et de y . On utilisera avec profit l'équation de Poisson que l'on écrira sous la forme

$$\Delta\Phi \equiv \left\{ \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Phi = 4\pi G \rho . \quad (17)$$

3.3) (1 point) Etablir que le potentiel projeté ψ vérifie l'équation

$$\Delta_{\perp}\psi \equiv \partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi = 2 \frac{\Sigma}{\Sigma_c} . \quad (18)$$

On exprimera la masse surfacique critique Σ_c en fonction de c , de G et des distances D_L , D_{LS} et D_S .

3.4) (3 points) Le morceau de bravoure !

On veut dériver dans cette question la fonction de Green vérifiant l'équation de Poisson bi-dimensionnelle

$$\Delta_{\perp}G(x, y) = \delta^2(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y) . \quad (19)$$

On définit la transformée de Fourier de $G(\vec{r})$ grâce à la relation usuelle

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} G(\vec{k}) . \quad (20)$$

Calculer $G(\vec{k})$ en fonction de \vec{k} et l'intégrer afin d'obtenir la fonction de Green recherchée. On pourra tout d'abord réaliser que G ne dépend que du module r du vecteur \vec{r} puisque le problème est invariant sous une rotation de centre O . Ensuite on pourra choisir de prendre $\vec{r} = r\vec{e}_y$ et l'on intégrera tout d'abord suivant la composante k_y . L'intégrale restante suivant k_x a le mauvais goût de diverger mais qu'à cela ne tienne ! On montrera alors que la fonction $G(r) - G(r_0)$ est parfaitement définie et vaut

$$G(r) - G(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u} \left\{ e^{-r_0u} - e^{-ru} \right\} . \quad (21)$$

On la calculera et l'on en déduira que la fonction de Green est égale à

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (22)$$

3.5) (1 point) En déduire que l'on peut choisir (à une constante près) le potentiel projeté sous la forme

$$\psi(\vec{a}) = \frac{1}{\pi} \int_{(Oxy)} d^2\vec{\xi} \frac{\Sigma(\vec{\xi})}{\Sigma_c} \ln \left\| \vec{a} - \vec{\xi} \right\| . \quad (23)$$

3.6) (1 point) Retrouver alors l'expression (5).

Bon courage !

Glossaire

Vitesse de la lumière

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} . \quad (24)$$