

Universités de Grenoble & de Savoie

Module d'introduction à la théorie quantique des champs

Master 2ème année de physique subatomique et astroparticules – PSA

Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Durée 3 heures

## Énoncé de l'examen du lundi 26 février 2007

### Champ de Stueckelberg et propagateur du photon

Lorsque nous avons étudié en cours le champ électromagnétique, nous avons défini le propagateur du photon connectant le point  $y$  au point  $x$  grâce au T-produit

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} \equiv \langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = iG_{\mu\nu}(x-y) . \quad (1)$$

Le propagateur spatio-temporel  $G_{\mu\nu}(x-y)$  et sa transformée de Fourier  $G_{\mu\nu}(q)$ , qui intervient dans le calcul des graphes de Feynman, sont reliés par

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)} G_{\mu\nu}(q) . \quad (2)$$

Afin de simplifier les calculs, nous nous sommes placés dans la jauge de Feynman caractérisée par un paramètre  $\lambda$  valant 1. Nous avons alors dérivé une forme simple pour le propagateur de Feynman du photon avec

$$iG_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \eta_{\mu\nu} . \quad (3)$$



Le but de ce problème est de dériver la forme générale de  $iG_{\mu\nu}(q)$  en fonction de  $q$  et de  $\lambda$  tout d'abord de manière heuristique dans la première partie. Ensuite le Lagrangien de **Stueckelberg** sera introduit et une analyse classique de la théorie correspondante vous

sera proposée. Cette théorie permet de décrire aussi bien un champ vectoriel massif qu'un champ électromagnétique de masse nulle. Celles et ceux qui affectionnent les questions banco – voire superbanco – se réjouiront de l'analyse quantique de la troisième partie avec à la clé une dérivation complète du propagateur du champ de Stueckelberg et une confirmation du résultat heuristique précédent.

## 1 Dérivation heuristique de $i G_{\mu\nu}(q)$ .

Cette partie est notée sur 6 points.

Afin de quantifier le champ électromagnétique, nous avons introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - J^\mu A_\mu , \quad (4)$$

où  $J^\mu$  est un courant qui se conserve.

**1.1) (2 points – question rouge)** Dériver les équations d'Euler–Lagrange que les composantes  $A^\alpha$  du potentiel vecteur vérifient.

**1.2) (1 point)** La solution classique des équations établies dans la question précédente est de la forme

$$A^\alpha(x) = \int G^{\alpha\beta}(x-y) J_\beta(y) d^4y , \quad (5)$$

où  $G^{\alpha\beta}(x-y)$  représente la propagation de la contribution de la source  $J_\beta$  située en  $y$  jusqu'au point  $x$ . Montrer que cette fonction de Green vérifie l'équation

$$\square G^{\alpha\beta}(x) + (\lambda - 1) \partial^\alpha \partial_\mu G^{\mu\beta}(x) = \eta^{\alpha\beta} \delta^4(x) . \quad (6)$$

**1.3) (1 point)** En déduire que la transformée de Fourier  $G^{\alpha\beta}(q)$  que l'on définit à partir de la relation (2), vérifie l'équation dans l'espace des impulsions

$$\{q^2 \delta_\mu^\alpha + (\lambda - 1) q^\alpha q_\mu\} G^{\mu\beta}(q) = -\eta^{\alpha\beta} . \quad (7)$$

**1.4) (2 points – question rouge)** Montrer que

$$G^{\mu\beta}(q) = \frac{1}{q^2} \left\{ -\eta^{\mu\beta} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{q^\mu q^\beta}{q^2} \right\} \quad (8)$$

est solution de l'équation (7). Qu'obtient-on lorsque l'on prend  $\lambda = 1$  ? Qu'arrive-t-il lorsque  $\lambda = 0$  ? Commentaires ?

## 2 Lagrangien de Stueckelberg – analyse classique.

Cette partie est notée sur 5 points.

La théorie de Stueckelberg permet de décrire aussi bien un champ vectoriel de masse  $M$  qu'un champ électromagnétique de masse nulle. Son Lagrangien généralise la définition (4) avec l'adjonction d'un terme de masse pour le potentiel vecteur  $A^\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 - J^\mu A_\mu . \quad (9)$$

**2.1) (1 point)** Dériver les équations d'Euler–Lagrange correspondantes.

**2.2) (1 point)** Calculer la quadri-divergence de l'expression obtenue et montrer que

$$\{\lambda \square + M^2\} (\partial \cdot A) = 0 . \quad (10)$$

On utilisera avec profit le fait que le courant  $J^\mu$  se conserve et que par conséquent sa quadri-divergence est nulle.

**2.3) (1 point)** Dans cette question, on s'intéresse à la limite dans laquelle la masse  $M \neq 0$  et  $\lambda \rightarrow 0$ . Le Lagrangien (9) décrit alors un champ vectoriel de masse  $M$  comme par exemple celui qui est associé au boson de jauge  $Z^0$ . Que devient l'équation (10) ? Combien y a-t-il de degrés de liberté indépendants associés au potentiel vecteur  $A^\mu$  ? Montrer que celui-ci vérifie dans le vide une équation de Klein–Gordon dont la masse associée est  $M$ .

**2.4) (0,5 point)** Dans le cas général où  $\lambda \neq 0$ , la quadri-divergence de  $A^\mu$  se comporte comme un champ scalaire vérifiant l'équation de Klein–Gordon

$$\{\square + m^2\} (\partial \cdot A) = 0 , \quad (11)$$

dont la masse associée  $m$  est donnée par

$$m^2 = \frac{M^2}{\lambda} . \quad (12)$$

**A partir de maintenant, nous prendrons  $\lambda > 0$  afin que  $m^2$  soit positif.** La relation (11) conduit à une décomposition du potentiel vecteur  $A^\mu$  en une partie scalaire  $A_S^\mu$  proportionnelle au quadri-gradient de la divergence  $\partial \cdot A$  et en une partie transverse  $A_T^\mu$  qui se comporte comme un champ vectoriel de masse  $M$ . Montrer tout d'abord que la partie scalaire, que l'on définit par

$$A_S^\mu \equiv -\frac{1}{m^2} \partial^\mu (\partial \cdot A) , \quad (13)$$

vérifie l'équation de Klein–Gordon

$$\{\square + m^2\} A_S^\mu = 0 . \quad (14)$$

**2.5) (0,5 point)** Montrer que la partie transverse  $A_T^\mu$ , que l'on définit par

$$A_T^\mu \equiv A^\mu - A_S^\mu = A^\mu + \frac{1}{m^2} \partial^\mu (\partial \cdot A) , \quad (15)$$

a une quadri-divergence nulle exactement comme le champ vectoriel massif de la question (2.3).

**2.6) (1 point)** Montrer finalement que la partie transverse  $A_T^\mu$  vérifie l'équation de Klein–Gordon

$$\{\square + M^2\} A_T^\mu = 0 . \quad (16)$$

### 3 Propagateur de Stueckelberg – analyse quantique.

**Cette partie est notée sur 9 points.**

L'analyse précédente nous permet de décomposer le potentiel vecteur  $A^\mu$  de la théorie de Stueckelberg en une partie transverse  $A_T^\mu$  de masse  $M$  et en une partie scalaire  $A_S^\mu$  de masse  $m$  en sorte que

$$A^\mu = A_T^\mu + A_S^\mu . \quad (17)$$

En théorie quantique des champs, le développement de Fourier de la partie transverse  $A_T^\mu$  en une somme d'ondes planes se met sous la forme

$$A_T^\mu(x) = \int d\tilde{K} \sum_{\lambda=1}^3 e^{\mu(\mathbf{k}, \lambda)} \left\{ a(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ikx} \right\} , \quad (18)$$

avec

$$d\tilde{K} = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\Omega_k} . \quad (19)$$

Dans les relations (18) et (19), l'énergie associée au quantum d'impulsion  $\mathbf{k}$  vaut

$$k^0 = \Omega_k = \sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2} . \quad (20)$$

Le développement de la partie scalaire est donné par

$$A_S^\mu(x) = \int \tilde{d}k \frac{k^\mu}{M} \left\{ a(\mathbf{k}, 0) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}, 0) e^{ikx} \right\} , \quad (21)$$

où cette fois

$$\tilde{d}k = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} . \quad (22)$$

Dans les relations (21) et (22), l'énergie associée au quantum d'impulsion  $\mathbf{k}$  vaut

$$k^0 = \omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} , \quad (23)$$

dans la mesure où la masse associée au mode scalaire est  $m$  et non  $M$ . Les relations de commutation entre opérateurs et annihilateurs s'écrivent

$$[a(\mathbf{k}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)] = \delta_{\lambda\sigma} (2\pi)^3 2\Omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \delta_{\lambda\sigma} \tilde{\delta}_{KP} , \quad (24)$$

pour les degrés de liberté transverses ( $1 \leq \lambda, \sigma \leq 3$ ) alors que pour le champ scalaire, nous avons

$$[a(\mathbf{k}, 0), a^\dagger(\mathbf{p}, 0)] = -(2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = -\tilde{\delta}_{kp} . \quad (25)$$

**Noter le signe (-) dans la dernière relation de commutation.** Tous les autres commutateurs sont nuls \*

**3.1) (1 point – question blanche)** Montrer que les vecteurs de polarisation  $e^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$  associés au champ transverse  $A_T^\mu$  vérifient la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = - \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right\} . \quad (26)$$

**3.2) (1 point – question bleue)** Montrer rapidement que

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} = \overbrace{A_{T\mu}(x)A_{T\nu}(y)} + \overbrace{A_{S\mu}(x)A_{S\nu}(y)} . \quad (27)$$

**3.3) (1 point – question rouge)** On se concentre tout d'abord sur la partie transverse  $A_T^\mu$  pour laquelle on établira que

$$\overbrace{A_{T\mu}(x)A_{T\nu}(y)} = \int d\tilde{K} \left\{ -\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right\} \{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \} . \quad (28)$$

**3.4) (3 points – question superbancos !)** Démontrer l'égalité

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \frac{\{-\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / M^2\}}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{i}{M^2} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta^4(x-y) + \overbrace{A_{T\mu}(x)A_{T\nu}(y)} . \quad (29)$$

On pourra commencer par établir la relation précédente pour les composantes espace-espace puis temps-espace de l'expression tensorielle du membre de gauche. Dans le calcul plus délicat de la composante temps-temps, le contour d'intégration ne peut être rebouclé dans le plan complexe de la variable  $k^0 = k'^0 + ik''^0$  que si l'intégrand tend vers 0 lorsque le module de  $k^0$  tend vers  $\infty$ .

---

\*On pourra vérifier de retour chez soi et à tête reposée que ces expressions conduisent bien aux relations de commutation canoniques entre le champ  $A_\alpha$  et son moment conjugué  $\Pi^\beta \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}_\beta$ .

**3.5) (2 points – question banco)** Montrer de même que

$$-\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \frac{k_\mu k_\nu / M^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{M^2} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta^4(x-y) + \overbrace{A_{S_\mu}(x) A_{S_\nu}(y)}. \quad (30)$$

**3.6) (1 point – question rouge)** Dédurre des questions précédentes que le propagateur associé au champ de Stueckelberg se met sous la forme

$$i G_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \left\{ \eta_{\mu\nu} + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right\}. \quad (31)$$

Retrouver alors le résultat heuristique (8) dans la limite où  $\lambda \neq 0$  et  $M \rightarrow 0$ .

Bon courage !